

一、单项选择题（本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分）在每小题列出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的，请将正确选项前的字母填在题后的括号内。

1. 一个连通的无向图 G ，如果它的所有结点的度数都是偶数，那么它具有（ ）
 A. 汉密尔顿回路 B. 欧拉回路
 C. 汉密尔顿通路 D. 初级回路
2. 设 G 是连通简单平面图， G 中有 11 个顶点 5 个面，则 G 中的边是（ ）
 A. 10 B. 12 C. 16 D. 14
3. 在布尔代数 L 中，表达式 $(a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c)$ 的等价式是（ ）
 A. $b \wedge (a \vee c)$
 B. $(a \wedge b) \vee (a' \wedge b)$
 C. $(a \vee b) \wedge (a \vee b \vee c) \wedge (b \vee c)$
 D. $(b \vee c) \wedge (a \vee c)$
4. 设 i 是虚数， $\cdot$ 是复数乘法运算，则 $G = \langle \{1, -1, i, -i\}, \cdot \rangle$ 是群，下列是 G 的子群是（ ）
 A. $\langle \{1\}, \cdot \rangle$ B. $\langle \{-1\}, \cdot \rangle$
 C. $\langle \{i\}, \cdot \rangle$ D. $\langle \{-i\}, \cdot \rangle$
5. 设 Z 为整数集， A 为集合， A 的幂集为 $P(A)$ ， $+$ 、 $-$ 、 $/$ 为数的加、减、除运算， $\cap$ 为集合的交运算，下列系统中是代数系统的有（ ）
 A. $\langle Z, +, / \rangle$ B. $\langle Z, / \rangle$
 C. $\langle Z, -, / \rangle$ D. $\langle P(A), \cap \rangle$
6. 下列各代数系统中不含有零元素的是（ ）
 A. $\langle Q, * \rangle$ Q 是全体有理数集， $*$ 是数的乘法运算
 B. $\langle Mn(R), * \rangle$ $Mn(R)$ 是全体 n 阶实矩阵集合， $*$ 是矩阵乘法运算
 C. $\langle Z, \circ \rangle$ Z 是整数集， $\circ$ 定义为 $x \circ y = xy$ ， $\forall x, y \in Z$
 D. $\langle Z, + \rangle$ Z 是整数集， $+$ 是数的加法运算
7. 设 $A = \{1, 2, 3\}$ ， A 上二元关系 R 的关系图如下：
 R 具有的性质是
 A. 自反性
 B. 对称性
 C. 传递性
 D. 反自反性



8. 设 $A = \{a, b, c\}$ ， A 上二元关系 $R = \{ \langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle a, c \rangle \}$ ，则关系 R 的对称闭包 $S(R)$ 是（ ）
 A. $R \cup I_A$ B. R C. $R \cup \{ \langle c, a \rangle \}$ D. $R \cap I_A$
9. 设 $X = \{a, b, c\}$ ， I_X 是 X 上恒等关系，要使 $I_X \cup \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle \} \cup R$ 为 X 上的等价关系， R 应取（ ）
 A. $\{ \langle c, a \rangle, \langle a, c \rangle \}$ B. $\{ \langle c, b \rangle, \langle b, a \rangle \}$
 C. $\{ \langle c, a \rangle, \langle b, a \rangle \}$ D. $\{ \langle a, c \rangle, \langle c, b \rangle \}$
10. 下列式子正确的是（ ）
 A. $\emptyset \in \emptyset$ B. $\emptyset \subseteq \emptyset$ C. $\{ \emptyset \} \subseteq \emptyset$ D. $\{ \emptyset \} \in \emptyset$
11. 设解释 R 如下：论域 D 为实数集， $a=0, f(x, y)=x-y, A(x, y):x < y$ 。下列公式在 R 下为真的是（ ）
 A. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(A(x, y)) \rightarrow A(f(x, z), f(y, z))$
 B. $(\forall x)A(f(a, x), a)$
 C. $(\forall x)(\forall y)(A(f(x, y), x))$

D. $(\forall x)(\forall y)(A(x,y) \rightarrow A(f(x,a),a))$

12. 设 B 是不含变元 x 的公式，谓词公式 $(\forall x)(A(x) \rightarrow B)$ 等价于 ()

A. $(\exists x)A(x) \rightarrow B$

B. $(\forall x)A(x) \rightarrow B$

C. $A(x) \rightarrow B$

D. $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B$

13. 谓词公式 $(\forall x)(P(x,y)) \rightarrow (\exists z)Q(x,z) \wedge (\forall y)R(x,y)$ 中变元 x ()

A. 是自由变元但不是约束变元

B. 既不是自由变元又不是约束变元

C. 既是自由变元又是约束变元

D. 是约束变元但不是自由变元

14. 若 P ：他聪明； Q ：他用功；则“他虽聪明，但不用功”，可符号化为 ()

A. $P \vee Q$

B. $P \wedge \neg Q$

C. $P \rightarrow \neg Q$

D. $P \vee \neg Q$

15. 以下命题公式中，为永假式的是 ()

A. $p \rightarrow (p \vee q \vee r)$

B. $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

C. $\neg (q \rightarrow q) \wedge p$

D. $\neg (q \vee \neg p) \rightarrow (p \wedge \neg p)$

二、填空题 (每空 1 分，共 20 分)

16. 在一棵根树中，仅有一个结点的入度为 0，称为树根，其余结点的入度均为 1。

17. $A=\{1,2,3,4\}$ 上二元关系 $R=\{\langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$ ， R 的关系矩阵 M_R 中 $m_{24}=\underline{1}$ ， $m_{34}=\underline{0}$ 。

18. 设 $\langle S, * \rangle$ 是群，则那么 S 中除 幺元 外，不可能有别的幂等元；若 $\langle S, * \rangle$ 有零元，则 $|S|=\underline{1}$ 。

19. 设 A 为集合， $P(A)$ 为 A 的幂集，则 $\langle P(A), \subseteq \rangle$ 是格，若 $x, y \in P(A)$ ，则 x, y 最大下界是 ，最小上界是 。

20. 设函数 $f: X \rightarrow Y$ ，如果对 X 中的任意两个不同的 x_1 和 x_2 ，它们的象 y_1 和 y_2 也不同，我们说 f 是 入射 函数，如果 $\text{ran} f = Y$ ，则称 f 是 满射 函数。

21. 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，其等价类记为 $[x]_R$ 。若 $x, y \in A$ ，若 $\langle x, y \rangle \in R$ ，则 $[x]_R$ 与 $[y]_R$ 的关系是 ，而若 $\langle x, y \rangle \notin R$ ，则 $[x]_R \cap [y]_R = \underline{\quad}$ 。

22. 使公式 $(\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists y)B(y)$ 成立的条件是 不含有 y ， 不含有 x 。

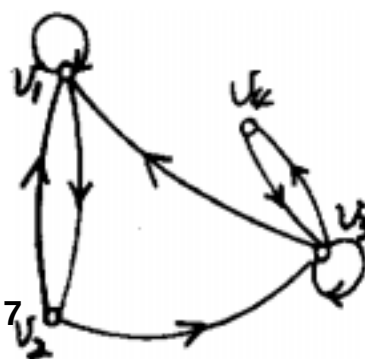
23. 设 $M(x):x$ 是人， $D(s):x$ 是要死的，则命题“所有的人都是要死的”可符号化为 $(\forall x)\underline{\quad}$ ，其中量词 $(\forall x)$ 的辖域是 。

24. 若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 是 ，则称 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 是相容的，若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$ 是 ，则称 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 是不相容的。

25. 判断一个语句是否为命题，首先要看它是否为 ，然后再看它是否具有唯一的 。

三、计算题 (共 30 分)

26. (4 分) 设有向图 $G=(V, E)$ 如下图所示，试用邻接矩阵方法求长度为 2 的路的总数和回路总数。



27.(5) 设 $A=\{a,b\}$, $P(A)$ 是 A 的幂集, $\oplus$ 是对称差运算, 可以验证 $\langle P(A), \oplus \rangle$ 是群。设 n 是正整数, 求 $(\{a\}^{-1}\{b\}\{a\})^n \oplus \{a\}^{-n}\{b\}^n\{a\}^n$

28.(6 分) 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, A 上偏序关系

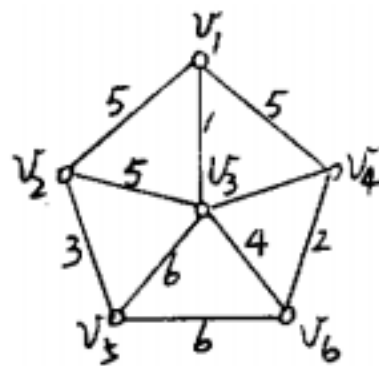
$$R=\{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \} \cup I_A;$$

(1) 作出偏序关系 R 的哈斯图

(2) 令 $B=\{1,2,3,5\}$, 求 B 的最大, 最小元, 极大、极小元, 上界, 下确界, 下界, 下确界。

29.(6 分) 求 $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow \neg Q)$ 的主合取范式并给出所有使命题为真的赋值。

30.(5 分) 设带权无向图 G 如下, 求 G 的最小生成树 T 及 T 的权总和, 要求写出解的过程。



31.(4 分) 求公式 $\neg((\forall x)F(x,y) \rightarrow (\exists y)G(x,y)) \vee (\exists x)H(x)$ 的前束范式。

四、证明题 (共 20 分)

32.(6 分) 设 T 是非平凡的无向树, T 中度数最大的顶点有 2 个, 它们的度数为 $k(k \geq 2)$, 证明 T 中至少有 $2k-2$ 片树叶。

33.(8 分) 设 A 是非空集合, F 是所有从 A 到 A 的双射函数的集合, $\circ$ 是函数复合运算。

证明: $\langle F, \circ \rangle$ 是群。

34.(6 分) 在个体域 $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中证明等价式:

$$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$$

五、应用题 (共 15 分)

35.(9 分) 如果他是计算机系本科生或者是计算机系研究生, 那么他一定学过 DELPHI 语言而且学过 C++ 语言。只要他学过 DELPHI 语言或者 C++ 语言, 那么他就会编程序。因此如果他是计算机系本科生, 那么他就会编程序。请用命题逻辑推理方法, 证明该推理的有效结论。

36.(6 分) 一次学术会议的理事会共有 20 个人参加, 他们之间有的相互认识但有的相互不认识。但对任意两个人, 他们各自认识的人的数目之和不小于 20 。问能否把这 20 个人排在圆桌旁, 使得任意一个人认识其旁边的两个人? 根据是什么?

参考答案

一、单项选择题（本大题共 15 小题，每小题 1 分，共 15 分）

- 1.B

2.D

3.A

4.A

5.D
- 6.D

7.D

8.C

9.D

10.B
- 11.A

12.A

13.C

14.B

15.C

二、填空题

- 16.0

1
- 17.1

0
- 18.单位元

1
19. $x \cap y$

$x \cup y$
- 20.入射

满射
21. $[x]_R = [y]_R$
22. $A(x)$

$B(y)$
23. $(M(x) \rightarrow D(x))$

$M(x) \rightarrow D(x)$
- 24.可满足式

永假式 (或矛盾式)
- 25.陈述句

真值

三、计算题

26. $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 M^2_{ij} = 18, \quad \sum_{i=1}^4 M^2_{ii} = 6$

G 中长度为 2 的路总数为 18，长度为 2 的回路总数为 6。

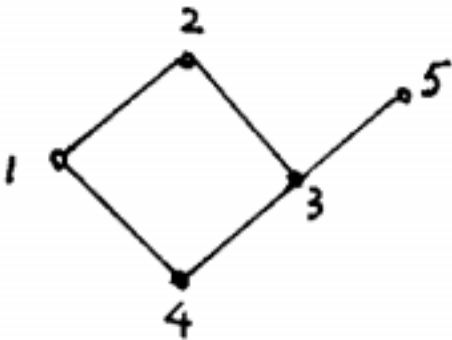
- 27.当 n 是偶数时， $\forall x \in P(A), x^n = \varnothing$

当 n 是奇数时， $\forall x \in P(A), x^n = x$

于是：当 n 是偶数， $(\{a\}^{-1} \{b\} \{a\})^n \oplus \{a\}^{-n} \{b\}^n \{a\}^n$
 $= \varnothing \oplus (\{a\}^{-1})^n \{b\}^n \{a\}^n = \varnothing \oplus \varnothing = \varnothing$

当 n 是奇数时，
 $(\{a\}^{-1} \{b\} \{a\})^n \oplus \{a\}^{-n} \{b\}^n \{a\}^n$
 $= \{a\}^{-1} \{b\} \{a\} \oplus (\{a\}^{-1})^n \{b\}^n \{a\}^n$
 $= \{a\}^{-1} \{b\} \{a\} \oplus \{a\}^{-1} \{b\} \{a\} = \varnothing$

28.(1)偏序关系 R 的哈斯图为



(2)B 的最大元：无，最小元：无；

极大元：2, 5, 极小元：1, 3

下界：4, 下确界 4；

上界：无, 上确界：无

$$\begin{aligned}
 29. \text{原式} &\Leftrightarrow (\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)) \wedge ((P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)) \\
 &\Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)) \wedge (\neg(P \rightarrow \neg Q) \vee \neg(P \rightarrow Q)) \\
 &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee \neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \\
 &\Leftrightarrow (\neg(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \\
 &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \\
 &\Leftrightarrow P \wedge (Q \vee \neg Q) \\
 &\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q) \\
 &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)
 \end{aligned}$$

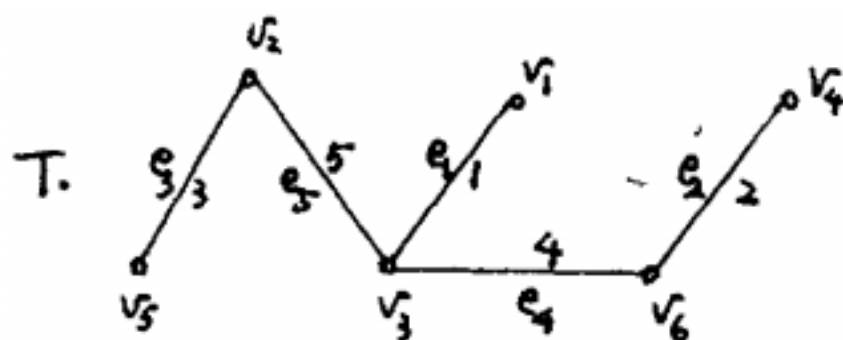
命题为真的赋值是 $P=1, Q=0$ 和 $P=1, Q=1$

$$\begin{aligned}
 30. \text{令 } e_1 &= (v_1, v_3), & e_2 &= (v_4, v_6) \\
 e_3 &= (v_2, v_5), & e_4 &= (v_3, v_6) \\
 e_5 &= (v_2, v_3), & e_6 &= (v_1, v_2) \\
 e_7 &= (v_1, v_4), & e_8 &= (v_4, v_3) \\
 e_9 &= (v_3, v_5), & e_{10} &= (v_5, v_6)
 \end{aligned}$$

令 a_i 为 e_i 上的权, 则

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 = a_6 = a_7 = a_8 < a_9 = a_{10}$$

取 a_1 的 $e_1 \in T, a_2$ 的 $e_2 \in T, a_3$ 的 $e_3 \in T, a_4$ 的 $e_4 \in T, a_5$ 的 $e_5 \in T$, 即,



T 的总权和 $= 1+2+3+4+5=15$

$$\begin{aligned}
 31. \text{原式} &\Leftrightarrow \neg (\forall x_1 F(x_1, y) \rightarrow \exists y_1 G(x, y_1)) \vee \exists x_2 H(x_2) \quad (\text{换名}) \\
 &\Leftrightarrow \neg \exists x_1 \exists y_1 (F(x_1, y) \rightarrow G(x, y_1)) \vee \exists x_2 H(x_2) \\
 &\Leftrightarrow \forall x_1 \forall y_1 \neg (F(x_1, y_1) \rightarrow G(x, y_1)) \vee \exists x_2 H(x_2) \\
 &\Leftrightarrow \forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 (\neg (F(x_1, y_1) \rightarrow G(x, y_1)) \vee H(x_2))
 \end{aligned}$$

四、证明题

32. 设 T 中有 x 片树叶, y 个分支点。于是 T 中有 $x+y$ 个顶点, 有 $x+y-1$ 条边, 由握手定理知 T 中所有顶点的度数之和

$$\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i) = 2(x+y-1)$$

又树叶的度为 1, 任一分支点的度大于等于 2

且度最大的顶点必是分支点, 于是

$$\sum_{i=1}^{x+y} d(v_i) \geq x \cdot 1 + 2(y-2) + k + k = x + 2y + 2k - 4$$

$$\text{从而 } 2(x+y-1) \geq x+2y+2k-4 \\ x \geq 2k-2$$

33. 从定义出发证明：由于集合 A 是非空的，故显然从 A 到 A 的双射函数总是存在的，如 A 上恒等函数，因此 F 非空

(1) $\forall f, g \in F$, 因为 f 和 g 都是 A 到 A 的双射函数，故 $f \circ g$ 也是 A 到 A 的双射函数，从而集合 F 关于运算 $\circ$ 是封闭的。

(2) $\forall f, g, h \in F$, 由函数复合运算的结合律有 $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ 故运算 $\circ$ 是可结合的。

(3) A 上的恒等函数 I_A 也是 A 到 A 的双射函数即 $I_A \in F$, 且 $\forall f \in F$ 有 $I_A \circ f = f \circ I_A = f$, 故 I_A 是 $\langle F, \circ \rangle$ 中的幺元

(4) $\forall f \in F$, 因为 f 是双射函数，故其逆函数是存在的，也是 A 到 A 的双射函数，且有 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$, 因此 f^{-1} 是 f 的逆元

由此上知 $\langle F, \circ \rangle$ 是群

34. 证明 $(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\neg A(a_1) \vee B(a_1)) \vee (\neg A(a_2) \vee B(a_2)) \vee \dots \vee (\neg A(a_n) \vee B(a_n)) \\ &\Leftrightarrow (\neg A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee \neg A(a_n)) \vee (B(a_1) \vee B(a_2) \vee \dots \vee B(a_n)) \\ &\Leftrightarrow \neg (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)) \vee (\neg B(a_1) \vee B(a_2) \vee \dots \vee B(a_n)) \\ &\Leftrightarrow \neg (\forall x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x) \end{aligned}$$

五、应用题

35. 令 p : 他是计算机系本科生

q : 他是计算机系研究生

r : 他学过 DELPHI 语言

s : 他学过 C++ 语言

t : 他会编程序

前提: $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s), (r \vee s) \rightarrow t$

结论: $p \rightarrow t$

证① p	P (附加前提)
② $p \vee q$	T ① I
③ $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$	P (前提引入)
④ $r \wedge s$	T ②③ I
⑤ r	T ④ I
⑥ $r \vee s$	T ⑤ I
⑦ $(r \vee s) \rightarrow t$	P (前提引入)
⑧ t	T ⑥⑦ I

36. 可以把这 20 个人排在圆桌旁，使得任一人认识其旁边的两个人。

根据：构造无向简单图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{20}\}$ 是以 20 个人为顶点的集合， E 中的边是若任两个人 v_i 和 v_j 相互认识则在 v_i 与 v_j 之间连一条边。

$\forall v_i \in V, d(v_i)$ 是与 v_i 相互认识的人的数目，由题意知 $\forall v_i, v_j \in V$ 有 $d(v_i) + d(v_j) \geq 20$, 于是 G 中存在汉密尔顿回路。

设 $C = v_{i1}v_{i2}, v_{i20}v_{i1}$ 是 G 中一条汉密尔顿回路，按这条回路的顺序按其排座位即符合要求。

